

# МАТРИЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ГРАФОСТРУКТУРНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

*Блюмин Семён Львович, sabl@lipetsk.ru*

*Липецкий государственный технический университет, г. Липецк*

Математическое моделирование социальных сетей является актуальной темой исследований отечественных и зарубежных специалистов (см., например, [1,2]). Графоструктурное моделирование таких (и других) сетей является неотъемлемой составляющей этого моделирования. В то же время анализу матричных характеристик соответствующих графоструктурных моделей уделяется недостаточное внимание.

В работе [3] предложена некоторая специальная графоструктурная модель для социальных сетей – итерированная локальная ориентированная транзитивностная модель (ИЛОТМ – ILDTM – The Iterated Local Directed Transitivity Model for Social Networks). Ее введение обстоятельно обосновано. В качестве примера рассмотрено построение ИЛОТМ  $C'_3$  для ориентированного 3-цикла  $C_3$ . При этом их матричные характеристики не исследуются; в связи со спектральными свойствами графов упоминается только матрица смежности.

Цель данной работы – построить матрицы инцидентности  $I$ , смежности  $A$ , валентности  $D$  и лапласианы  $L$  орграфа  $C_3$  и его одношаговой ИЛОТМ  $C'_3$  и представить их взаимосвязи и интерпретации. Кроме того, для орграфа  $C'_3$  исследована возможность его трактовки как метаграфа (о метаграфах см., например, [4,5]).

Отправной точкой для установления взаимосвязей указанных матриц служат стандартные соотношения из алгебраической теории неориентированных

$$L(G) = D(G) + A(G)$$

и ориентированных графов

$$L(G) = D(Gno) - A(Gno)$$

(здесь «no» означает «соответствующий неориентированный» граф), которые в случае метаграфов приобретают определенное своеобразие, в некотором смысле сочетающее вышеуказанные; см., например, [5] и обсуждение ниже.

Построение ИЛОТМ выполняется следующим образом [3].

В орграфе  $G=(V(G), A(G))$  ( $V(G)$  – множество вершин,  $A(G)$  – множество дуг, arcs) выделяются триады  $T$  – трехвершинные подорграфы следующего вида:

$$T = (V(T), A(T)), V(T) = \{y, x, z\}, A(T) = \{(y, x), (x, z)\}.$$

Присоединение элемента  $x'$  – клона элемента  $x$  – к этой триаде состоит в добавлении двунаправленной дуги между  $x'$  и  $x$ , то есть пары дуг  $(x', x)$  и  $(x, x')$ , а также в добавлении, для дуг  $(y, x)$  и  $(x, z)$ , сопровождающих их дуг  $(y, x')$  и  $(x', z)$  соответственно. Изображение этой операции приведено на Рис. 1 в [3], а изображение ИЛОТМ для ор-3-цикла  $C_3$  – на Рис. 2 там же.

Матрица инцидентности орграфа ИЛОТМ имеет вид:

$$I(C'_3) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1' \\ 2' \\ 3' \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Соответствующий лапласиан

$$L(C'_3) = I(C'_3) \cdot I(C'_3)^T = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Его разложение на матрицы валентности и смежности

$$L(C_3') = D(C_3'no) - A(C_3'no) =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Верхний левый 3X3 блок матрицы  $I(C_3')$  – матрица  $I(C_3)$ . Соответствующий лапласиан и его разложение таковы:

$$L(C_3) = I(C_3) \cdot I(C_3)^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= D(C_3no) - A(C_3no) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что верхний левый блок матрицы  $A(C_3'no)$  совпадает с матрицей  $A(C_3no)$ , тогда как элементы верхнего левого блока матрицы  $D(C_3'no)$  в три раза больше элементов матрицы  $D(C_3no)$ .

Матрица инцидентности построенного графа как метаграфа имеет вид

$$I(MC_3') = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Лапласиан

$$L(MC_3') = I(MC_3') \cdot I(MC_3')^T = \begin{bmatrix} 5 & -1+1 & -1+1 & -2 & -1 & -1 \\ -1+1 & 5 & -1+1 & -1 & -2 & -1 \\ -1+1 & -1+1 & 5 & -1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Его разложение на матрицы валентности и смежности

$$L(MC_3') = D + \tilde{A} - A =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\tilde{A}$  – матрица смежности вершин графа, попадающих в одну метавершину метаграфа. Обращают на себя внимание отличия матриц  $L(C_3')$  и  $L(MC_3')$  и, как следствия этого, отличия матриц, входящих в разложения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта 19-47-480003-р\_а.

### *Литература*

1. Губанов, Д.А. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства / Д.А. Губанов, Д.А. Новиков, А.Г. Чхартишвили. – М.: Физматлит, 2010. — 228 с.
2. Scott, J. Social network analysis: developments, advances, and prospects / J. Scott // SOCNET. – 2011. - No 1. – P. 21–26.
3. Bonato, A. The Iterated Local Directed Transitivity Model for Social Networks / A. Bonato, D.W. Cranston, M. Huggan, T. Marbach, R. Mutharasan // arXiv:1912.08924.
4. Basu, A. Metagraphs and Their Applications / A. Basu, R. Blanning. – NY: Springer, 2007. – 172 p.
5. Блюмин, С.Л. Графоструктурное моделирование. Метаграфы и их матрицы / С.Л. Блюмин // Вестник ЛГТУ. – 2015. – № 1(23). – С. 7-13.