АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПОВЕДЕНИЕ
МОМЕНТОВ ВТОРОГО ПОРДЯКА
ОЦЕНКИ СЕМИВАРИОГРАММЫ ГНЕЗДОВОЙ СТРУКТУРЫ

Цеховая Т. В., Tsekhavaya@bsu.by,
Кисель А. Ю., anyakisel17@gmail.com
Белорусский государственный университет, Минск

В настоящее время для решения ряда прикладных задач прогнозирования находят широкое применение геостатистические методы. Ключевым понятием геостатистики является семивариограмма. В связи с этим актуальны задачи исследования свойств этой функции, а также построения и изучения ее оценок [1 – 4]. В данной работе рассматривается случайный процесс с семивариограммой гнездовой структуры.

Пусть

$$Z(t) = \sum_{j=0}^{q} \beta_j Y_j(t), \tag{1}$$

где $q \in \boldsymbol{N}$, β_j - постоянные, удовлетворяющие условию $\sum_{j=0}^{q} \beta_j^2 < \infty$, $Y_j(t)$ – гауссовские случайные процессы с нулевым математическим ожиданием $M\left(Y_j(t)\right) = 0$ и неизвестными ковариационными функциями $R_j(t), t \in \boldsymbol{R}$. Предположим также, что взаимные ковариационные функции $R_{jp}(t,s)$, $t,s \in \boldsymbol{R}$, случайных процессов $Y_j(t)$ и $Y_p(t)$, $j,p = 0,\dots q$, $j \neq p$, удовлетворяют равенству $R_{jp}(t,s) = M\left(Y_j(t)Y_p(s)\right) = 0$.

Отметим, что $Z(t)$ также является гауссовским случайным процессом.

Ранее показано [5], что ковариационная функция процесса $Z(t)$ имееет вид:

$$R_Z(t) = \sum_{j=0}^{q} \beta_j^2 R_j(t). \tag{2}$$

Теорема 1. Семивариограмма случайного процесса $Z(t)$ имеет представление:

$$\gamma_z(t) = \sum_{j=0}^{q} \beta_j^2 \left(R_j(0) - R_j(t)\right), \; t \in \boldsymbol{R}. \qquad (3)$$

Доказательство. Учитывая связывающее соотношение семивариограммы и ковариационной функции стационарного в широком смысле случайного процесса [1], а также выражение (2), запишем

$$\gamma_Z(t) = R_Z(0) - R_Z(t) = \sum_{j=0}^{q} \beta_j^2 \left(R_j(0) - R_j(t)\right),$$

что и требовалось доказать.

В качестве оценки семивариограммы случайного процесса $Z(t)$, построенной по последовательным полученным через одинаковые промежутки времени наблюдениям $Z(1), \dots, Z(n)$, рассмотрим статистику:

$$\hat{\gamma}_Z(h) = \frac{1}{2(n-h)} \sum_{t=1}^{n-h} (Z(t) - Z(t+h))^2, \; h = 0, \dots, n-1. \qquad (4)$$

Положим также $\hat{\gamma}_Z(-h) = \hat{\gamma}_Z(h), \; h = 0, \dots, n-1$, и $\hat{\gamma}(h) = 0$ для $|h| \geq n$.

С помощью возможностей языка программирования Python смоделируем по $n, \; n = 100$, отсчетов $Y_j(1), \dots, Y_j(n)$ случайных процессов $Y_j(t), j = 0, \dots, q$. Для этого предположим, что $q = 4$, а случайные процессы $Y_j(t), j = 0, \dots, q$, имеют соответственно ковариационные функции $R_j(t) = e^{-w_j|t|}, t \in \boldsymbol{R}, \; w_0 = 1, \, w_1 = 2, w_2 = 3, w_3 = 4, w_4 = 5$. Полагая $\beta_0 = 1, \beta_1 = 2, \beta_2 = 3, \beta_3 = 4, \beta_4 = 5$, и учитывая (1), вычислим $Z(1), \dots, Z(n)$. Заметим, что в данном случае

$$DZ(t) = R_Z(0) = \sum_{j=0}^{q} \beta_j^2 = 55.$$

Тогда из соотношения (3) имеем

$$\gamma_z(t) = \sum_{j=0}^{q} \beta_j^2 \left(1 - e^{-w_j|t|}\right). \qquad (5)$$

Далее вычислим оценку семивариограммы (4) для $h = 0, \dots, n-1$.

Применяя пакет matplotlib, построим графики семивариограммы (5) и ее оценки (4). На рисунках 1, 2 график оценки семивариограммы $\hat{\gamma}_Z(h)$ представлен зеленым цветом, а график истинной семивариограммы $\gamma_Z(h)$ изображен оранжевым.

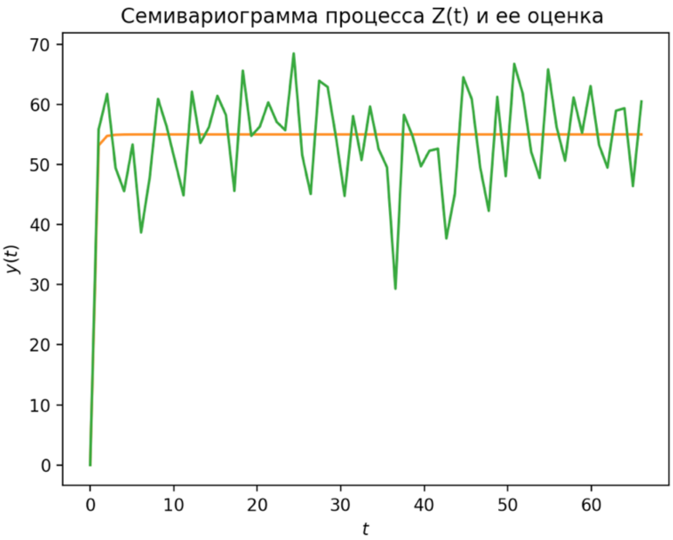

Рис. 1 – Семивариограмма $\gamma_Z(t)$ и ее оценка $\hat{\gamma}_Z(t)$,

$$w_0 = 1,\ w_1 = 2, w_2 = 3, w_3 = 4, w_4 = 5$$

Рассмотрим случай, когда $w_0 = 1, w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = \frac{1}{3}, w_3 = \frac{1}{4}, w_4 = \frac{1}{5}$. Тогда получим следующий результат.

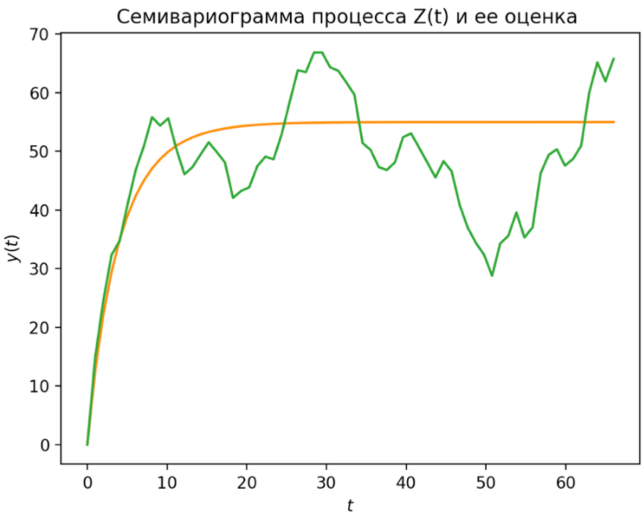

Рис. 2 - Семивариограмма $\gamma_Z(t)$ и ее оценка $\hat{\gamma}_Z(t)$,

$$w_0 = 1, w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = \frac{1}{3}, w_3 = \frac{1}{4}, w_4 = \frac{1}{5}$$

Найдем выражения для первых двух моментов статистики (4).

Используя вид оценки семивариограммы $\hat{\gamma}_z(h)$, свойства математического ожидания и определение вариограммы, запишем

$$M\hat{\gamma}_z(t) = \frac{1}{2(n-h)} \sum_{t=1}^{n-h} M\{(Z(t) - Z(t+h))^2\} = \gamma_z(t),\ h = 0, \dots, n-1. \qquad (6)$$

Таким образом, статистика (4) является несмещенной оценкой семивариограммы $\gamma_Z(h)$.

Теорема 2. Для оценки семивариограммы $\hat{\gamma}_Z(h)$, $h = 0, \dots, n-1$, случайного процесса $Z(t)$ имеют место следующие соотношения:

$$(n-h^-)cov\{\hat{\gamma}_z(h_1), \hat{\gamma}_z(h_2)\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{q} \sum_{p=0}^{q} \sum_{r=-(n-h_2-1)}^{n-h_1-1} \left(1 + \frac{m(r)}{n-h^+}\right) J_{jpr}(h_1, h_2), \tag{7}$$

$$(n-h)D\hat{\gamma}_z(h) = \sum_{j=0}^{q} \sum_{p=0}^{q} \sum_{r=-(n-h-1)}^{n-h-1} \left(1 + \frac{|r|}{n-h}\right) J_{jpr}^0(h), \tag{8}$$

где

$$\begin{gathered} J_{jpr}(h_1, h_2) = \frac{1}{2}\beta_j^2\beta_p^2(R_j(r)R_p(r) - 2R_j(r)R_p(r-h_2) + \\ +R_j(r-h_2)R_p(r-h_2) - 2R_j(r)R_p(r+h_1) + 2R_j(r)R_p(r+h_1-h_2) + \\ +2R_j(r-h_2)R_p(r+h_1) - 2R_j(r-h_2)R_p(r+h_1-h_2) + \\ +R_j(r+h_1)R_p(r+h_1) - 2R_j(r+h_1)R_p(r+h_1-h_2) + \\ +R_j(r+h_1-h_2)R_p(r+h_1-h_2)), \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} J_{jpr}^0(h) = \frac{1}{2}\beta_j^2\beta_p^2(4R_j(r)R_p(r) - 2R_j(r)R_p(r-h) + R_j(r-h)R_p(r-h) - \\ -2R_j(r)R_p(r+h) + 2R_j(r-h)R_p(r+h) - 2R_j(r-h)R_p(r) + \\ R_j(r+h)R_p(r+h) - 2R_j(r+h)R_p(r)), \end{gathered} \tag{10}$$

$$m(r) = \begin{cases} m_1(r), & h_2 > h_1, \\ m_2(r), & h_1 \geq h_2, \end{cases} \tag{11}$$

$$m_1(r) = \begin{cases} r, & r = 1-n+h_2, \dots, -1, \\ 0, & r = 0, \dots, h_2 - h_1, \\ h_2 - h_1 - r, & r = h_2 - h_1 + 1, \dots, n - h_1 - 1, \end{cases}$$

$$m_2(r) = \begin{cases} r - h_2 + h_1, & r = 1-n+h_2, \dots, h_2 - h_1 - 1, \\ 0, & r = h_2 - h_1, \dots, 0, \\ -r, & r = 1, \dots, n - h_1 - 1, \end{cases}$$

$$h^+ = \max(h_1, h_2), \qquad h^- = \min(h_1, h_2), \tag{12}$$

$h, h_1, h_2 = 0, \dots, n-1$.

Доказательство. Используя определение ковариационной функции, подставляя вместо $\hat{\gamma}_Z(h)$ ее выражение в явном виде, запишем

$$cov\{\hat{\gamma}_z(h_1), \hat{\gamma}_z(h_2)\} = M\,\hat{\gamma}_z(h_1)\hat{\gamma}_z(h_2) - M\,\hat{\gamma}_z(h_1) M\,\hat{\gamma}_z(h_2) =$$

$$= M\Big(\frac{1}{2(n-h_1)}\sum_{t_1=1}^{n-h_1}(Z(t_1) - Z(t_1+h_1))^2 \frac{1}{2(n-h_2)}\sum_{t_2=1}^{n-h_2}(Z(t_2) - Z(t_2+h_2))^2\Big) -$$

$$-M\left(\frac{1}{2(n-h_1)}\sum_{t_1=1}^{n-h_1}\big(Z(t_1) - Z(t_1+h_1)\big)^2\right) M\left(\frac{1}{2(n-h_2)}\sum_{t_2=1}^{n-h_2}\big(Z(t_2) - Z(t_2+h_2)\big)^2\right).$$

Из определения смешанных моментов второго и четвертого порядков, учитывая связывающее соотношение смешанных моментов со смешанными семиинвариантами, стационарность исследуемых процессов, имеем

$$cov\{\hat{\gamma}_z(h_1), \hat{\gamma}_z(h_2)\} = \frac{1}{2(n-h_1)(n-h_2)} \times$$

$$\times \sum_{t_1=1}^{n-h_1}\sum_{t_2=1}^{n-h_2}\sum_{j=0}^{q}\sum_{p=0}^{q}\beta_j^2\beta_p^2 (R_j(t_1 - t_2)R_p(t_1 - t_2) - 2R_j(t_1 - t_2)R_p(t_1 - t_2 - h_2) +$$

$$+R_j(t_1 - t_2 - h_2)R_p(t_1 - t_2 - h_2) - 2R_j(t_1 - t_2)R_p(t_1 + h_1 - t_2) +$$

$$+2R_j(t_1 - t_2)R_p(t_1 + h_1 - t_2 - h_2) + 2R_j(t_1 - t_2 - h_2)R_p(t_1 + h_1 - t_2) -$$

$$-2R_j(t_1 - t_2 - h_2)R_p(t_1 + h_1 - t_2 - h_2) + R_j(t_1 + h_1 - t_2)R_p(t_1 + h_1 - t_2) -$$

$$-2R_j(t_1 + h_1 - t_2)R_p(t_1 + h_1 - t_2 - h_2) + R_j(t_1 + h_1 - t_2 - h_2)R_p(t_1 + h_1 - t_2 - h_2).$$

Сделаем замену переменных $t_1 = t_1, r = t_1 - t_2$ и изменим порядок суммирования. Тогда, учитывая (9), (11) и (12), получим выражение (7) для ковариации.

Равенство (8) для дисперсии оценки семивариограммы (4) нетрудно получить из (7), если положить $h_1 = h_2 = h$ и принять во внимание (10).

Исследуем асимптотическое поведение ковариации и дисперсии оценки семивариограммы $\hat{\gamma}_z(h)$ при дополнительных ограничениях на характеристики процессов $Y_j(t), j = 0, \dots, q$, во временной области.

Теорема 3. Если

$$\sum_{t=-\infty}^{+\infty}|R_j(t)| < \infty, \tag{13}$$

где $R_j(t)$ – ковариационные функции случайных процессов $Y_j(t)$ соответственно, то

$$\lim_{n\to\infty}(n-h^-)\ cov\{\hat{\gamma}_z(h_1),\hat{\gamma}_z(h_2)\}=\sum_{j=0}^{q}\sum_{p=0}^{q}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}J_{jpr}(h_1,h_2), \quad (14)$$

$$\lim_{n\to\infty}(n-h)D\hat{\gamma}_z(h)=\sum_{j=0}^{q}\sum_{p=0}^{q}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}J_{jpr}^{0}(h),$$

$h,h_1,h_2=0,\dots,n-1$, h^- определено в (12), $J_{jpr}(h_1,h_2)$, $J_{jpr}^0(h)$ - задаются выражениями (9), (10) соответственно.

Доказательство. Учитывая (7), рассмотрим разность

$$\left|(n-h^-)cov\{\hat{\gamma}_z(h_1),\hat{\gamma}_z(h_2)\}-\sum_{j=0}^{q}\sum_{p=0}^{q}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}J_{jpr}(h_1,h_2)\right|\le$$

$$\le\sum_{j=0}^{q}\sum_{p=0}^{q}\sum_{r=-\infty}^{h_2-n}|J_{rpj}(h_1,h_2)|+\sum_{j=0}^{q}\sum_{p=0}^{q}\sum_{r=n-h_1}^{+\infty}|J_{jpr}(h_1,h_2)|+$$

$$+\sum_{j=0}^{q}\sum_{p=0}^{q}\sum_{r=-(n-h_2-1)}^{n-h_1-1}\left|\frac{m(r)}{n-h^+}\right||J_{jpr}(h_1,h_2)|,$$

где $m(r)$ задается равенством (11), $h^+=\max(h_1,h_2)$.

Обозначим слагаемые в правой части последнего неравенства соответственно I_1,I_2,I_3. Поскольку имеет место (13), то $\sum_{j=0}^{q}\sum_{p=0}^{q}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}|J_{jpr}(h_1,h_2)|<\infty$. Следовательно, слагаемые I_1,I_2 стремятся к нулю при $n\to\infty$ как остаток сходящегося ряда, а $I_3\to 0$ при $n\to\infty$ в силу леммы Кронекера [6]. Таким образом, справедливо (14).

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично, если положить $h_1=h_2=h$. Теорема доказана.

Из теоремы 3 следует, что

$$\lim_{n\to\infty}D\hat{\gamma}_z(h)=0, h=0,\dots,n-1. \quad (15)$$

В силу (6) и предельного равенства (15) можно сделать вывод, что $\hat{\gamma}_z(h)$ является состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой для семивариограммы $\gamma_Z(h)$.

Литература

1. Cressie, N. Statistics for Spatial Data. / N. Cressie // New York. – Wiley, 1991. – 900 p.
2. Цеховая, Т.В. Свойства вариограммы внутренне стационарных случайных процессов / Т. В. Цеховая // Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения. Материалы научной конференции. Минск: БГУ. 2004. С. 181-186.
3. Цеховая, Т.В. Исследование статистических свойств оценок вариограммы и ковариационной функции / Н.Н. Труш, Т. В. Цеховая // Вести НАН Беларуси. Сер.1, Физ. Мат. Мех., №2, 2001, С. 24-29.
4. Цеховая, Т. В. Асимптотическое распределение оценки семивариограммы гауссовского случайного процесса / Т. В. Цеховая // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2015. № 1. С. 89 – 95.
5. Цеховая, Т.В. Первые два момента оценки семивариограммы случайного процесса с семивариограммой гнездовой структуры / Т.В. Цеховая, А.Ю. Кисель // III Международная научно-практическая конференция «Наука и образование в современном мире: вызовы XXI века». Нур-Султан, Казахстан, 10-12 июля 2019г. / Құраст.: Е. Ешім, Е. Абиев т.б. – Нур-Султан, 2019. Т. IV, С. 48 – 51.
6. Ширяев, А. Н. Вероятность / А. Н. Ширяев. – 4-е изд. – Москва, МЦНМО, 2007. – 577 с.