УДК 929.52

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Кертанова Валерия Викторовна, vkertanova@yandex.ru

Балашовский институт (филиал) Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского, г. Балашов, Россия

Для описания различных научных процессов и процессов, происходящих в окружающем мире необходимы знания различных областей науки, в первую очередь – математики. Известно, что математика не является естественной наукой, но, несмотря на это, математический аппарат очень широко применяется для выполнения различных вычислений, анализа полученных результатов, и получения новых результатов [1]. Например, без математической статистики экономисты не смогут получить достоверных результатов, то есть отсутствие математических методов окажется проблемой для науки. Любая современная работа по экономике написана с использованием продвинутого математического аппарата. Чтобы решить, куда вкладывать деньги, как просчитать начисления, определить брать ли кредит или ипотеку, нужно использовать сложные математические модели.

Изучение многих задач показывает, что их решение часто сводится к математическому моделированию процессов в виде формулы, т.е. в виде функциональной зависимости. Математическая модель дает возможность не только изучать явление в целом, но и предсказать его развитие, делать количественные оценки изменений, происходящие с течением времени [3]. Одним из основных разделов математики является теория дифференциальных уравнений. Для составления математической модели в виде дифференциальных уравнений нужно, как правило, знать только локальные связи и не нужна информация обо всем физическом явлении в целом. Дифференциальные уравнения позволяют описывать динамику процессов в режиме реального времени [2].

Рассмотрим экономическую задачу: Пусть сумма A положена в сберегательную кассу на k % в год. Найдем закон изменения суммы при условии, что приращение начисляется без капитализации.

Решение: Если начислять проценты один раз в конце года, то общая сумма S вклада составит $S = A(1+k)$. Если начислять проценты один раз в полугодие, то общая сумма S вклада составит $S = A\left(1+\frac{k}{2}\right)^2$. Если начислять проценты ежеквартально, то общая сумма S вклада составит $S = A\left(1+\frac{k}{4}\right)^4$. Если начислять проценты ежемесячно, то общая сумма S вклада составит $S = A\left(1+\frac{k}{12}\right)^{12}$.

Обозначим за p – количество начислений процентов в год, тогда в конце года наращение суммы в общем виде определяется формулой $S = A\left(1+\frac{k}{p}\right)^p$. Таким образом, через n лет общая сумма составит $S = A\left(\left(1+\frac{k}{p}\right)^p\right)^n$. Если число p начислений процентов в год будет увеличиваться, то

$$S = \lim_{p\to\infty} A\left(\left(1+\frac{k}{p}\right)^p\right)^n = A\lim_{p\to\infty}\left(\left(1+\frac{k}{p}\right)^{\frac{p}{k}}\right)^{nk} \qquad (1)$$

Используя формулу второго замечательного закона, получим

$$\lim_{p\to\infty}\left(1+\frac{k}{p}\right)^{\frac{p}{k}} = e.$$

Тогда равенство (1) можно записать в виде $S = Ae^{nk}$. Аналогично, через промежуток времени t получаем накопившуюся сумму$S = Ae^{kt}$.

В течение короткого промежутка времени dt приращение суммы dS представлено в следующем виде

$dS = d(Ae^{kt}) = kAe^{kt}dt = kSdt.$

Таким образом, получили дифференциальное уравнение. Чтобы его решить необходимо разделить переменные. Получили $\frac{dS}{S} = kdt$. Проинтегрируем данное выражение:

$$\int_{S_1}^{S_2} \frac{dS}{S} = \int kdt,$$

$$\int_{S_1}^{S_2} \frac{dS}{S} = kt,$$

$$t = \frac{1}{k} \int_{S_1}^{S_2} \frac{dS}{S} \ (2).$$

Приведем пример задачи, которую можно решить, используя уравнение (2).

Задача 1. Сумма 1500000 рублей положена в сберегательную кассу под 6,5% годовых. Определить, через сколько лет эта сумма удвоится.

Решение: Применим полученную формулу (2)

$$t = \frac{1}{k} \int_{S_1}^{S_2} \frac{dS}{S} = \frac{1}{k} lnS_{S_1}^{S_2} = \frac{1}{k}(lnS_2 - lnS_1).$$

Используя условия задачи и подставляя их в формулу, получим:

$$t = \frac{ln\frac{3000000}{1500000}}{0{,}065} = \frac{ln2}{0{,}065} \approx \frac{0{,}6931}{0{,}065} \approx 10{,}66 \text{ лет}.$$

Таким образом, использование математических моделей в любой науке облегчает исследование и, упрощая его изучение, дает возможность предсказывать поведение объекта.

Литература

1. Кертанова, В.В. Дифференциальные уравнения в биологии / В. В. Кертанова// Биоразнообразие и антропогенная трансформация природных экосистем: материалыВсерос. науч.-практ. конф., посвященной памяти А.И. Золотухина и Году экологии. – Саратов:Сарат. источник, 2017. – С.87–91.
2. Кертанова, В.В. Дифференциальные уравнения: практ. занятия: учеб.-мет. пособие для студентов вузов / В.В.Кертанова, О.Я. Рыжкова. – Балашов : Николаев, 2014. – 104 с.

3. Кертанова, В. В. Использование аппарата дифференциальных уравнений при составлении математической модели в экологии // В. В. Кертанова, Инновации и информационные технологии в образовании :материалы II Всерос. науч.-практ.конф.,Липецк 9–10 апр. 2009 г. : в 2 т. – Липецк, ЛГПУ, 2009.– Т.1. – С.182–184.