

ОБ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

Можей Наталья Павловна, tozheynatalya@mail.ru

*Белорусский государственный университет информатики и
радиоэлектроники, Минск, Беларусь*

Повышенный интерес к симплектическим многообразиям первоначально мотивирован важной ролью пуассоновских структур в гамильтоновой динамике, этот интерес возродился после публикации фундаментальных трудов А. Лихнеровича [1], А. Кириллова [2], А. Вайнштейна [3] и др. Симплектическое многообразие – это многообразие с заданной на нем симплектической формой (замкнутой невырожденной дифференциальной 2-формой), оно позволяет естественным геометрическим образом ввести гамильтонову механику и дает наглядное толкование многим ее свойствам.

Целью данной работы является классификация четырехмерных изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой над полем \mathbb{C} . В работе [4] автором проделан первый шаг такой классификации, там же даны основные определения и приведено более подробное обоснование применяемых методов.

Пусть (\bar{G}, M) – четырехмерное однородное пространство, а $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пары (\bar{G}, G) поставим в соответствие пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, где $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли \bar{G} и \mathfrak{g} – подалгебра в $\bar{\mathfrak{g}}$, соответствующая подгруппе Ли G . Рассмотрим задачу классификации для заданной подалгебры \mathfrak{g} с точностью до эквивалентности пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$, у которых изотропное представление является инъекцией и сопряжено подалгебре \mathfrak{g} .

Пусть $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ – базис алгебры Ли \mathfrak{g} ($n = \dim \mathfrak{g}$) и $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ – базис векторного пространства U . Для $x \in \mathfrak{g}$ через $A(x)$ и $B(x)$ обозначим матрицы отображений $adx: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ и $x_U: U \rightarrow U$ в базисах E и U соответственно. Тогда отображение $\rho: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$, $x \mapsto B(x)$ – инъекция.

Это позволяет отождествить алгебру Ли \mathfrak{g} с некоторой подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{gl}(4, \mathbb{C})$.

Пусть $V = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ – \mathfrak{g} -модуль, соответствующий изотропному представлению. Пространство $B(V)$ билинейных форм на V естественным образом становится \mathfrak{g} -модулем, если положить

$$(x.b)(v_1, v_2) = -b(x.v_1, v_2) - b(v_1, x.v_2),$$

где $x \in \mathfrak{g}$, $v_1, v_2 \in V$, $b \in B(V)$. Почти симплектической структурой на \mathfrak{g} -модуле V называется невырожденная, кососимметрическая билинейная форма $b \in B(V)$ такая, что $x.b = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Другими словами, $b \in B(V)$.⁹

Пусть B – матрица симплектической структуры в базисе пространства V , а A_x – матрица элемента $x \in \rho(\mathfrak{g})$ в том же базисе. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ допускает почти симплектическую структуру, если выполняется следующее свойство:

$$A_x^t \cdot B + B \cdot A_x = 0, \quad \forall x \in \rho(\mathfrak{g}). \quad (1)$$

Существует единственная (с точностью до сопряженности) невырожденная кососимметрическая билинейная форма b [5]. Множество всех эндоморфизмов пространства V , сохраняющих невырожденную кососимметрическую билинейную форму b , является алгеброй Ли. Эта алгебра Ли обозначается $\mathfrak{sp}(4, X)$, она представима в следующем виде:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y & u & w \\ z & t & v & v \\ s & p & -x & -z \\ p & r & -y & -t \end{pmatrix} \middle| x, y, z, t, u, v, s, w, p, r \in X \right\}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что алгебра Ли \mathfrak{g} является подалгеброй в линейной алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4, X)$.

Решение проблемы классификации четырехмерных изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой разобьем на следующие части:

1. Классификация с точностью до сопряженности всех подалгебр \mathfrak{g}^x удовлетворяющих (1), что равносильно классификации (с точностью до сопряженности) подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4, X)$.
2. Для каждой подалгебры \mathfrak{g} из пункта 1 производим классификацию (с точностью до эквивалентности) изотропно-точных пар $(\bar{\mathfrak{g}}^x, \mathfrak{g}^x)$, у которых изотропное представление сопряжено подалгебре \mathfrak{g}^x .
3. Для каждой пары $(\bar{\mathfrak{g}}^x, \mathfrak{g}^x)$ находим (с точностью до эквивалентности пар) все вещественные формы $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Описание пункта 1 приведено в работе [4]. Для ссылки на подалгебры, полученные в [4], будем использовать следующее обозначение: $d.n$, где d – размерность подалгебры, а n – ее порядковый номер. Будем говорить, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ имеет тип $(d.n)$, если изотропное представление пары сопряжено подалгебре \mathfrak{g} , имеющей номер $(d.n)$. Остановимся подробнее на классификации изотропно-точных пар из пункта 2. В качестве примера классификации пар с заданным изотропным представлением рассмотрим пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 2.9, т. е. имеющие подалгебру \mathfrak{g} следующего вида:

$$\begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline y \\ \hline -x \\ \hline -y \\ \hline \end{array} .$$

Теорема. Любая пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ типа 2.9 эквивалентна одной из следующих:

1	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_3	0	0	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	0

2	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_3	0	$-e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	0	0	0
3	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	e_2
u_3	u_3	0	$-e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	$-e_2$	0	0

Действительно, пусть (\mathfrak{g}, U) – точный обобщенный модуль, $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ – базис пространства U , $\{e_1, e_2\}$ – базис в \mathfrak{g} , где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathfrak{h} = X e_1 + X e_2$ – нильпотентная подалгебра алгебры Ли \mathfrak{g} . Пусть (V, \mathfrak{g}) – виртуальная пара, определенная линейным отображением $q: \mathfrak{g} \rightarrow \Lambda(U, \mathfrak{g})$ (т. е. билинейное отображение $B: \mathfrak{g} \times V \rightarrow V$ имеет вид

$$x.(y, u) = ([x, y] + q(x)(u), x.u)$$

для всех $x, y \in \mathfrak{g}, u \in U$). Без ограничения общности мы можем считать q примарным. Так как

$$\mathfrak{g}^{(0,0)}(\mathfrak{h}) = X e_1 + X e_2,$$

$$U^{(1,0)}(\mathfrak{h}) = X u_1, U^{(0,1)}(\mathfrak{h}) = X u_2,$$

$$U^{(-1,0)}(\mathfrak{h}) = X u_3, U^{(0,-1)}(\mathfrak{h}) = X u_4,$$

то $C(e_1) = C(e_2) = 0$. Мы можем считать, что соответствующая виртуальная пара тривиальна и

$$\begin{aligned} [e_1, u_1] &= u_1, [e_1, u_2] = 0, [e_1, u_3] = -u_3, [e_1, u_4] = 0, \\ [e_2, u_1] &= 0, [e_2, u_2] = u_2, [e_2, u_3] = 0, [e_2, u_4] = -u_4. \end{aligned}$$

Так как отображение $q: \mathfrak{g} \rightarrow \Lambda(U, \mathfrak{g})$, соответствующее виртуальной паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ примарно, то $\bar{\mathfrak{g}}^\alpha(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}^\alpha(\mathfrak{h}) \times U^\alpha(\mathfrak{h}) \forall \alpha \in \mathfrak{h}^*$. Из того, что

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{g}}^{(0,0)}(\mathfrak{h}) &= Xe_1 + Xe_2, \\ \bar{\mathfrak{g}}^{(1,0)}(\mathfrak{h}) &= Xu_1, \bar{\mathfrak{g}}^{(0,1)}(\mathfrak{h}) = Xu_2, \\ \bar{\mathfrak{g}}^{(-1,0)}(\mathfrak{h}) &= Xu_3, \bar{\mathfrak{g}}^{(0,-1)}(\mathfrak{h}) = Xu_4, \end{aligned}$$

следует

$$\begin{aligned} [u_1, u_2] &= 0, & [u_2, u_3] &= 0, \\ [u_1, u_3] &= b_1e_1 + b_2e_2, & [u_2, u_4] &= f_1e_1 + f_2e_2, \\ [u_1, u_4] &= 0, & [u_3, u_4] &= 0. \end{aligned}$$

Проверяя тождества Якоби на векторах e_i, u_j, u_k ($1 \leq i \leq 2, 1 \leq j < k \leq 4$) и u_i, u_j, u_k ($1 \leq i < j < k \leq 4$), получаем, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ имеет вид

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	b_1e_1	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	f_2e_2
u_3	u_3	0	$-b_1e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	$-f_2e_2$	0	0

Рассмотрим следующие случаи:

1. $b_1 = f_2 = 0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$.

2. $b_1^2 + f_2^2 \neq 0, b_1f_2 = 0$. Отображение $\pi: \bar{\mathfrak{g}}' \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ такое, что

$$\begin{aligned} \pi(e_1) &= e_2, \pi(e_2) = e_1, \pi(u_1) = u_2, \pi(u_2) = u_1, \\ \pi(u_3) &= u_4, \pi(u_4) = u_3, \end{aligned}$$

устанавливает эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ и $(\bar{\mathfrak{g}}', \mathfrak{g}')$, где последняя имеет следующий вид:

	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	0	0	u_1	0	$-u_3$	0
e_2	0	0	0	u_2	0	$-u_4$
u_1	$-u_1$	0	0	0	$f_2 e_1$	0
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	$b_1 e_2$
u_3	u_3	0	$-f_2 e_1$	0	0	0
u_4	0	u_4	0	$-b_1 e_2$	0	0

Тогда без ограничения общности можно считать, что $b_1 \neq 0, f_2 = 0$ и пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$ при помощи отображения $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_2 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ такого, что

$$\pi(e_1) = e_1, \pi(e_2) = e_2, \pi(u_1) = \frac{1}{b_1} u_1,$$

$$\pi(u_2) = u_2, \pi(u_3) = u_3, \pi(u_4) = u_4.$$

3. $b_1 f_2 \neq 0$. Тогда пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$ при помощи отображения $\pi: \bar{\mathfrak{g}}_3 \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$ такого, что

$$\pi(e_1) = e_1, \pi(e_2) = e_2, \pi(u_1) = \frac{1}{b_1} u_1, \pi(u_2) = \frac{1}{f_2} u_2,$$

$$\pi(u_3) = u_3, \pi(u_4) = u_4.$$

Так как $\dim D\bar{\mathfrak{g}}_1 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_2 \neq \dim D\bar{\mathfrak{g}}_3$, пары $(\bar{\mathfrak{g}}_1, \mathfrak{g}_1)$, $(\bar{\mathfrak{g}}_2, \mathfrak{g}_2)$, $(\bar{\mathfrak{g}}_3, \mathfrak{g}_3)$ не эквивалентны.

Применяя аналогичные рассуждения для всех остальных случаев, получаем искомый результат классификации пар.

Таким образом, приведен алгоритм классификации изотропно-точных однородных пространств с инвариантной невырожденной почти симплектической структурой и проведено описание четырехмерных изотропно-точных почти симплектических однородных пространств.

Литература

1. Lichnerowicz A. Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées // Journal Differential Geometry. 1977, № 2. P. 253–300.

2. Кириллов А. А. Локальные алгебры Ли // Успехи математических наук. 1976, № 4 (190). С. 57–76.
3. Weinstein A. The local structure of Poisson manifolds // Journal Differential Geom. 1983, № 3. P. 523–557.
4. Можей Н. П. Почти симплектические однородные пространства // Труды БГТУ. Сер. 6, Физ.-мат. науки и информатика. 2009. № 6. С. 17–20.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552с.