МЕТОД ГОМОРИ РЕШЕНИЯ ПОЛНОСТЬЮ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

Трушков Александр Сергеевич, trushkov_as@mail.ru

ГОУ ВО МО Государственный социально-гуманитарный университет, г. Коломна, Россия

Целочисленное программирование ориентировано на решение задач, в которых все или некоторые переменные должны принимать целые значения.Использование при решении задач этого вида принципа округления решения до целых неприемлемо во многих случаях. Далее рассматривается один из способов решения линейных задач целочисленного программирования – метод отсекающих плоскостей (метод Гомори) [1].

Смысл этого метода состоит в следующем. Сначала решается задача линейного программирования без условия целочисленности переменных. Далее многогранник допустимых решений с помощью отсекающих плоскостей корректируется таким образом, что экстремальная точка становится целочисленной. При этом отсекаются области допустимых решений задачи линейного программирования, не содержащие целочисленных значений. Суть метода - в формировании отсекающих плоскостей.

Необходимое условие применения данного алгоритма: целочисленность всех коэффициентов и правых частей ограничений. Например, пусть ограничение имеет вид: $x_1 + \frac{1}{3}x_2 \le \frac{13}{2}$.В таком виде использовать неравенство в дробном алгоритме метода Гомори нельзя. Умножим все элементы неравенства на 6. Тогда неравенство примет следующий вид: $6x_1 + 2x_2 \le 39$и в данной форме оно используется при решении задачи.

На первом шаге метода решается задача линейного программирования (ЗЛП) без условия целочисленности. Если значения оптимальных переменных - целочисленные, то это и есть решение задачи. В противном случае вводится дополнительное ограничение (отсекающая плоскость) и решается новая ЗЛП. Данная процедура повторяется до тех пор, пока оптимум не станет целочисленным.

Пусть оптимальная симплекс-таблица ЗЛП без условия целочисленности имеет следующий вид:

БП	x_1	...	x_i	...	x_m	w_1	...	w_j	...	w_n	P
z	0	...	0	...	0	k_1	...	k_j	...	k_n	β_0
x_1	1	...	0	...	0	α_{11}	...	α_{1j}	...	α_{1n}	β_1
...	...	....	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_i	0	...	1	...	0	α_{i1}	...	α_{ij}	...	α_{in}	β_i
...	...	....	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	1	...	0	...	0	α_{m1}	...	α_{mj}	...	α_{mn}	β_m

Здесь $x_i = 1,...,m$ - базисные переменные; $w_j = 1,...,n$ - небазисные переменные.

Каждую строку симплекс-таблицы с нецелым значением β_i будем называть производящей строкой. Связанное с этой строкой уравнение будем называть производящим уравнением.

Запишем x_i- уравнение этой таблицы с нецелым значением $x_i = \beta_i$(производящее уравнение): $x_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} w_j = \beta_i$.

Разрешим уравнение относительно x_i: $x_i = \beta_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} w_j$.

Обозначим:$\beta_i = [\beta_i] + f_i$,$\alpha_{ij} = [\alpha_{ij}] + f_{ij}$, где $[a]$ - это наибольшее целое, удовлетворяющее условию $[a] \leq a$. Например, для $a = 4/3$:$[a] = [4/3] = 1$- целая часть числа,$f = a - [a] = 4/3 - [4/3] = 1/3$- дробная часть числа.Для $a = - 4/3$:$[a] = [- 4/3] = -2$- целая часть числа,$f = a - [a] = - 4/3 - [- 4/3] = 2/3$- дробная часть числа.

Таким образом:$0 < f_i < 1$; $0 \leq f_{ij} < 1$.

Подставим введенные соотношения для коэффициентов β_iи α_{ij} в уравнение x_i-ой строки:$f_i - \sum f_{ij} w_j = x_i - [\beta_i] + \sum[\alpha_{ij}] w_j$.

По условию целочисленности задачи переменные x_i и w_j должны быть целыми. Значит правая часть этого соотношения - целая величина, поэтому и левая тоже есть целая величина. По определению $f_{ij} \geq 0$, $w_j > 0$. Следовательно, $\sum f_{ij} w_j \geq 0$.Тогда $f_i - \sum f_{ij} w_j \leq f_i < 1$ или$f_i - \sum f_{ij} w_j \leq 0$.

Это условие и формирует отсекающую плоскость Гомори. Его можно переписать в виде:$S_i = \sum f_{ij} w_j - f_i$, где $S_i \geq 0$.

Приведем это неравенство к стандартной форме:

$S_i - \sum f_{ij} w_j = -f_i$, где $S_i \geq 0$.

Это условие будет включаться в оптимальную симплекс таблицу, полученную при решении ЗЛП без условия целочисленности. При включении этого условия в симплекс-таблицу на текущем оптимальном решении переменная$S_i = -f_i < 0$, так как все$w_j = 0$. Это означает, что новое ограничение на текущем решении не выполняется (недопустимое решение). Поэтому необходимо решать эту задачу двойственным симплекс-методом после включения отсечения Гомори в таблицу. Если полученное в результате решение окажется целочисленным, то задача решена. Если нет - то надо построить следующее отсечение Гомори.

Название "дробный алгоритм" связано с тем, что все коэффициенты отсечения Гомори - дробные числа $0 < f_i < 1$; $0 \leq f_{ij} < 1$.

В лабораторной работе для реализации алгоритма двойственного симплекс-методаиспользуется программа "ЗЛП для целочисленного программирования", представляющая собой макрос VisualBasicforApplications (VBA). Задание исходных данных полностью совпадает с заданием данных в программе "Решение и моделирование задач линейного программирования" из раздела "Линейное программирование"[2]. Отличие заключается в том, что при выполнении условия оптимальности и одновременном нарушении условия допустимости выдается соответствующее сообщение и реализуется алгоритм двойственного симплекс-метода.

Решить полностью целочисленную ЗЛП методом отсекающих плоскостей Гомори:

$$\max\ z = 20x_1 + 10x_2 + 10x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 20x_2 + 4x_3 \le 15 \\ 6x_1 + 20x_2 + 4x_3 \le 20 \end{cases}$$

$x_i \ge 0$ - целые

Приводим систему ограничений к стандартной форме:

$$\begin{cases} 2x_1 + 20x_2 + 4x_3 + x_4 = 15 \\ 6x_1 + 20x_2 + 4x_3 + x_5 = 20 \end{cases}$$

Решаем ЗЛП без условия целочисленности с помощью программы. Результирующая таблица расчетного листа приведена ниже.

	A	B	C	D	E	F	G
28	Результирующая симплекс-таблица						Правые части
29		x1	x2	x3	x4	x5	
30	z	0	56 2/3	3 1/3	0	3 1/3	66 2/3
31	zm	0	0	0	0	0	0
32	x4	0	13 1/3	2 2/3	1	- 1/3	8 1/3
33	x1	1	3 1/3	2/3	0	1/6	3 1/3

Расчет | Промежуточные

Условие целочисленности не выполнено. x_1 - производящая переменная.Дробные части: $f_{12} = 1/3,\ f_{13} = 2/3,\ f_{15} = 1/6,\ f_1 = 1/3$.Уравнение отсечения Гомори 1: $x_6 - 1/3\,x_2 - 2/3\,x_3 - 1/6\,x_5 = -1/3$.

Внедряем уравнение отсечения Гомори 1 в оптимальную симплекс-таблицу. Решаем полученную ЗЛП двойственным симплекс-методом с помощью программы. Таблицырасчетного листа приведены ниже.

Исходные данные

№	Название параметра	Значение
1	Число переменных	6
2	Число ограничений	3
3	Признак оптимизации	1
4	Число этапов моделирования	1

Моделиров

Коэффициенты целевой функции

	x1	x2	x3	x4	x5	x6
c	20.000	10.000	10.000	0.000	0.000	0.000

Фиктивные слагаемые коэффициентов целевой функции

	x1	x2	x3	x4	x5	x6
cm	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Номера базисных переменных

	Огранич. 1	Огранич. 2	Огранич. 3
x	4	1	6

Матрица коэффициентов

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Правые части
Огранич. 1	0	13 1/3	2 2/3	1	- 1/3	0	8 1/3
Огранич. 2	1	3 1/3	2/3	0	1/6	0	3 1/3
Огранич. 3	0	- 1/3	- 2/3	0	- 1/6	1	- 1/3

Результирующая симплекс-таблица

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Правые части
z	0	55	0	0	2 1/2	5	65
zm	0	0	0	0	0	0	0
x4	0	12	0	1	-1	4	7
x1	1	3	0	0	0	1	3
x3	0	1/2	1	0	1/4	-1 1/2	1/2

Расчет | Лист1 | Промежуточные

Условие целочисленности не выполнено. x_3 - производящая переменная.Дробные части: $f_{32} = 1/2$, $f_{35} = 1/4$, $f_{36} = 1/2$, $f_3 = 1/2$.

Уравнение отсечения Гомори 1: $x_7 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{2}x_5 = -\frac{1}{2}$.

Внедряем уравнение отсечения Гомори 2 в оптимальную симплекс-таблицу. Решаем полученную ЗЛП двойственным симплекс-методом с помощью программы. Таблицы расчетного листа приведены ниже.

Исходные данные

№	Название параметра	Значение
1	Число переменных	7
2	Число ограничений	4
3	Признак оптимизации	1
4	Число этапов моделирования	1

Моделирование

Коэффициенты целевой функции

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
c	20.000	10.000	10.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Фиктивные слагаемые коэффициентов целевой функции

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
cm	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Номера базисных переменных

	Огранич. 1	Огранич. 2	Огранич. 3	Огранич. 4
x	4	1	3	7

Матрица коэффициентов

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	Правые части
Огранич. 1	0	12	0	1	-1	4	0	7
Огранич. 2	1	3	0	0	0	1	0	3
Огранич. 3	0	1/2	1	0	1/4	-1 1/2	0	1/2
Огранич. 4	0	- 1/2	0	0	- 1/4	- 1/2	1	- 1/2

Результирующая симплекс-таблица

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	Правые части
z	0.000	50.000	0.000	0.000	0.000	0.000	10.000	60.000
zm	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x4	0.000	14.000	0.000	1.000	0.000	6.000	-4.000	9.000
x1	1.000	3.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	3.000
x3	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	-2.000	1.000	0.000
x5	0.000	2.000	0.000	0.000	1.000	2.000	-4.000	2.000

Расчет | Лист1 | Промежуточные

Условие целочисленности выполнено. Решение задачи:

$x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ z = 60$.

Для проверки решения воспользуемся программой "Метод Гомори для полностью целочисленных задач"[3]. Таблицы рабочего листа приведены ниже.

Исходные данные

№	Название параметра	Значение
1	Число переменных	5
2	Число ограничений	2
3	Признак оптимизации	1

Решение целочисленной ЗЛП

Коэффициенты целевой функции

	x1	x2	x3	x4	x5
c	20.000	10.000	10.000	0.000	0.000

Фиктивные слагаемые коэффициентов целевой функции

	x1	x2	x3	x4	x5
cm	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Признак целочисленности переменных

	x1	x2	x3	x4	x5
priz	1	1	1	0	0

Номера базисных переменных

	Огранич. 1	Огранич. 2
x	4	5

Матрица коэффициентов

	x1	x2	x3	x4	x5	Правые части
Огранич. 1	2.000	20.000	4.000	1.000	0.000	15.000
Огранич. 2	6.000	20.000	4.000	0.000	1.000	20.000

Номер отсечения Гомори	2

Результирующая симплекс-таблица

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	Правые части
z	0.000	50.000	0.000	0.000	0.000	0.000	10.000	60.000
zm	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
x4	0.000	8.000	0.000	1.000	-3.000	0.000	8.000	3.000
x1	1.000	2.000	0.000	0.000	-0.500	0.000	2.000	2.000
x3	0.000	2.000	1.000	0.000	1.000	0.000	-3.000	2.000
x6	0.000	1.000	0.000	0.000	0.500	1.000	-2.000	1.000

Расчет | Промежуточные

Решение задачи: $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ z = 60$. Оно отличается от полученного ранее при ручном построении отсечений Гомори. Но целевые функции обоих решений совпадают, значит, получены альтернативные решения рассматриваемой задачи.

Рассмотренный алгоритм решения полностью целочисленной задачи линейного программирования применяется в лабораторном практикуме учебного курса "Исследование операций".

Литература

1.Таха, Х. Введение в исследование операций: в 2 кн. / Х. Таха. – М.: Мир, 1985.

2. Трушков, А.С. Исследование операций. Основы теории и компьютерный практикум. Часть 1. Линейное программирование. Учебное пособие./А.С. Трушков - ГСГУ, г. Коломна, 2016.

3. Трушков, А.С. Исследование операций. Основы теории и компьютерный практикум. Часть 2. Задачи транспортного типа. Сетевое и целочисленное программирование. Учебное пособие./А.С.Трушков - ГСГУ, г. Коломна, 2016.